Aufgabe 1

$y = 2x^2 + 3x + 1 \qquad y = 10x^2 + 15x + 6{,}5$

$\Rightarrow \quad 2x^2 + 3x + 1 = 10x^2 + 15x + 6{,}5 \quad | -2x^2 - 3x - 1$

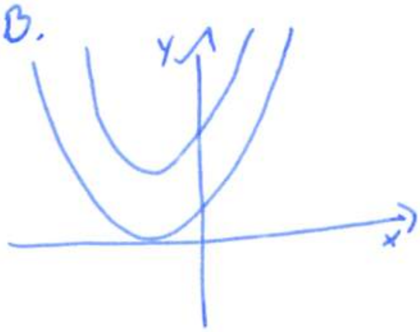
$0 = 8x^2 + 12x + 5{,}5$

$\Rightarrow \quad x_{1,2} = \dfrac{-12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 8 \cdot 5{,}5}}{16}$

$\Rightarrow \quad D = 144 - 176 < 0$

$\Rightarrow$ Keine Schnittpunkte

$\Rightarrow$ Da beide Parabeln keine gemeinsamen Punkte besitzen und nach oben geöffnet sind, müssen sie ineinander liegen. z.B.



Aufgabe 2

1) $\overline{BC} = a \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{BI}}{\overline{BC}} = \cos(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \overline{BI} = a \cdot \cos(\alpha)$

$$\frac{\overline{IC}}{\overline{BC}} = \sin(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \overline{IC} = a \cdot \sin(\alpha)$$

$$\Rightarrow \overline{IC} = \overline{BM}$$

$$\Rightarrow \overline{MI} = \overline{BI} - \overline{BM} = a \cdot \cos(\alpha) - \sin(\alpha) \cdot a$$

$$\Rightarrow A_{IKLM} = \overline{MI}^2 = a^2 (\cos(\alpha) - \sin(\alpha))^2$$

2) $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$

3) $A_{ABCD} = 3 \cdot A_{IKLM}$

$$\Rightarrow \quad a^2 = 3 \cdot a^2 (\cos(\alpha) - \sin(\alpha))^2 \quad \Big| : a^2$$

$$1 = 3 (\cos(\alpha) - \sin(\alpha))^2 \quad \Big| : 3$$

$$\frac{1}{3} = \underbrace{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)}_{1} \underbrace{- 2\cos(\alpha)\sin(\alpha)}_{\sin(2\alpha)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{3} = 1 - \sin(2\alpha) \quad \Big| -1 \quad \Big| \cdot (-1)$$

$$\frac{2}{3} = \sin(2\alpha) \quad \Big| \arcsin(.)$$

$$\Rightarrow \quad 2\alpha = \arcsin\left(\frac{2}{3}\right) \quad \Big| : 2$$

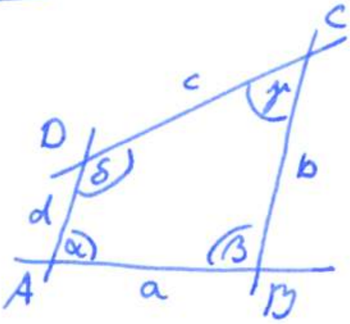
$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\alpha = 20{,}9052^\circ}}$$

Bem.: Eine zweite Lösung ergibt sich wie folgt: $\alpha_1 = 90 - \alpha = 69{,}0948^\circ$.

III

Aufgabe 3

a)



b)

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{DC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{AB} = \vec{DC}$$

$$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \Big| + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad B\,(3/1/4)$$

c)

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{CD} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{DA} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |\vec{AB}| = |\vec{CD}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14} \approx 3{,}742$$

$$|\vec{BC}| = |\vec{DA}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{17} \approx 4{,}123$$

d)

$$\vec{DA} \cdot \vec{AB} = |\vec{DA}| \cdot |\vec{AB}| \cdot \cos(\alpha)$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{\vec{DA} \cdot \vec{AB}}{|\vec{DA}| \cdot |\vec{AB}|} = \frac{(-2)\cdot 2 + (-1)\cdot(-2) + 3\cdot(-3)}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{14}}$$

$$= \frac{-11}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{14}} \Rightarrow \alpha \approx 135,48°$$

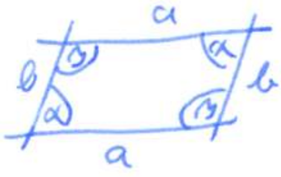
$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{BC}| \cdot \cos(\beta)$$

$$\Rightarrow \cos(\beta) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{BC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{BC}|} = \frac{2\cdot 2 + (-1)\cdot 2 + 3\cdot 3}{\sqrt{14} \quad \sqrt{17}}$$

$$= \frac{11}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{17}} \Rightarrow \beta \approx 44,52°$$

$$\Rightarrow \cos(\gamma) = \frac{\vec{BC} \cdot \vec{CD}}{|\vec{BC}| \cdot |\vec{CD}|} = \frac{-11}{\sqrt{14} \sqrt{17}} \Rightarrow \gamma = 135,48° = \alpha$$

$$\Rightarrow \cos(\delta) = \frac{\vec{CD} \cdot \vec{DA}}{|\vec{CD}| \cdot |\vec{DA}|} = \frac{11}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{17}} \Rightarrow \delta = 44,52° = \beta$$

e) 

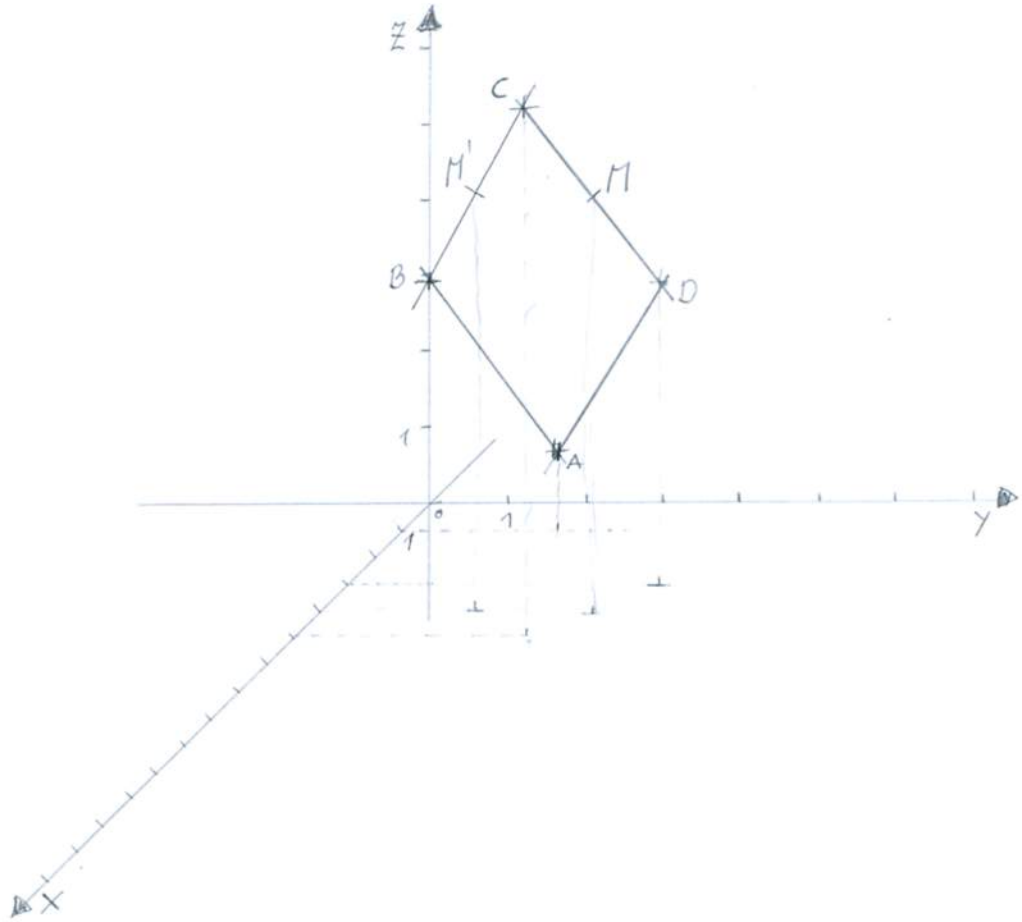
Es handelt sich um ein Parallelogramm.

f) $\vec{OM} = \vec{OC} + \frac{1}{2} \vec{CD} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3,5 \\ 5,5 \end{pmatrix} \Rightarrow M(4/3,5/5,5)$

g) $\vec{OM'} = \vec{OB} + \frac{1}{2} \vec{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5,5 \end{pmatrix} \Rightarrow M'(4/2/5,5)$

b)

V



i) $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3{,}5 \\ 5{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1{,}5 \\ 4{,}5 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MM'} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AM}$ und $\overrightarrow{MM'}$ liegen in einer Ebene. Gesucht ist ein dritter nicht komplanarer Vektor.

z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ => Test auf lineare Unabhängigkeit:

$$\lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1{,}5 \\ 4{,}5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 3\lambda + 0 + \nu = 0 \\ 1{,}5\lambda - \mu + 0 = 0 \\ 4{,}5\lambda + 0 + 0 = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \end{array} \Bigg\} \Rightarrow \mu = 0 \Bigg\} \Rightarrow \nu = 0 \quad ✓$$

=> Die Vektoren bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$.